Nafouz

التمرين الأول :(04 نقط)

I) ليكن k عددا صحيحا

1. اثبت أن العددين $A = 4k + 1$ و $B = 5k + 1$ أوليان فيما بينهما
2. نعتبر المعادلة : (E) ………… $5x - 4y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان

أ. عين حلا خاصا (x_0 , y_0) للمعادلة (E) يحقق: $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E)

ب. تحقق أن الثنائية (A , B) حل للمعادلة (E)

II) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: المستويين (P) و (R) اللذين معادلتاهما على الترتيب : $(P): 2x - y - z + 1 = 0$ ، $(R): x - 2y + 2z - 3 = 0$

1. بين أن المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم (d).
2. بين أن إحداثيات نقط المستقيم (R) تحقق المعادلة (E) .

ثم استنتج (γ) مجموعة نقط المستقيم (d) ، التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

التمرين الثاني :(4,5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{U},\vec{V})$ ، L العدد المركب المعرف بـ : $L = \frac{\alpha+\beta i}{3+5i}$

حيث α و β عددان حقيقيان

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$

2) نضع : $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا

ب/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ثم احسب $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$

3) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب :

$Z_A = -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ ، $Z_B = 3 + 5i$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA

جـ/ بين أن: $AB = \sqrt{34(2 - \sqrt{2})}$

4) لتكن النقطة G منتصف $[AB]$ و M نقطة كيفية من المستوي المركب

أ. بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2})$

ب عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

Nafouz

التمرين الثالث:(4,5 نقاط)

(U_n)متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

1 أ/ احسب U_2 و U_3

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

2 نعتبر المتتالية العددية (V_n)المعرفة كمايلي :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = n2^n U_n$

أ/ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول V_1

ب/ أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n)

3 أ/ احسب بدلالة المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + V_n$

ب/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots \times (nU_n)$

التمرين الرابع(07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة ثم شكل جدول تغيراتها

3 أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$)

.1 احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

.2 أ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

.3 1 بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

2 ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

.4 ا/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثياها

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ (Δ) و المماس (T)و المنحنى (C_f)

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

.5 a/ بين أن : $x \longmapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x = 0$ و $x = -1$

الموضـــوع الأول

التمرين الأول :(04 نقط)

I) 1 اثبت أن العددين $A = 4k + 1$ و $B = 5k + 1$ أوليان فيما بينهما :

A و B أوليان فيما بينهما يكافئ أن : $5A - 4B = 1$ أي :

$$5(4k + 1) - 4(5k + 1\ \ ) = 20k + 5 - 20k + 4 = 1$$

2 أ/ عين حلا خاصا $(x_0\ ,\ y_0)$ للمعادلة (E) يحقق: $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E)

أي $\quad 5x - 4y = 1$

إذن: $\quad 5(x - 1) - 4(y - 1) = 0$

ومنه حسب غوص : $y = 5k + 1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $x = 4k + 1$

ب/ تحقق أن الثنائية $(A\ ,\ B)$ حل للمعادلة (E): $5(4k + 1) - 4(5k + 1\ \ ) = 1$ محققة

II) 2 بين أن المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم (d):

لدينا: $\vec{n}_{\mathrm{P}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\vec{n}_{\mathrm{R}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ إذن $\vec{n}_{\mathrm{p}} \nparallel \vec{n}_{\mathrm{R}}$ ومنه المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم

3 بين أن إحداثيات نقط المستقيم (d) تحقق المعادلة (E) ، ثم استنتج (γ) مجموعة نقط المستقيم (d) ، التي إحداثياتها أعداد صحيحة

: $\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 4x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ وبالجمع نجد:

$5\ \ x - 4y - 1 = 0$ هي المعادلة (E)

بتعويض قيمة $x = 4k + 1$ و $y = 5k + 1$ في المعادلة الديكارتية للمستوي (P) أو (R) نجد : $\mathrm{z} = 3\mathrm{k} + 2$

ومنه المجموعة (γ) هي :

$$(d):\ \begin{cases} x = 4k + 1 \\ \mathrm{y} = 5k + 1 \\ \mathrm{z} = 3\mathrm{k} + 2 \end{cases} \qquad \cdot\ (\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$$

التمرين الثاني:(4.5 نقط)

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$:

لدينا : $L = \frac{\alpha+\beta i}{3+5i} = \frac{(\alpha+\beta i)\times(3-5i)}{(3+5i)\times(3-5i)} = \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} + i\,\frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن: $\begin{cases} \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 17\sqrt{2} \\ 3\beta - 5\alpha = 17\sqrt{2} \end{cases}$ وبحل جملة المعادلتين نجد : $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

2) أ/ عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا:

لدينا: $L = e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن : $L^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ومنه : يكون L^n عددا حقيقيا موجبا إذا كان: $\arg(L) = 2k\pi$

أي : $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ وبالتالي : $k \in \mathbb{Z}$; $n = 8k$

ب/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ، ثم احسب $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3+5i)^{2016}$:

$$L^{2016} = e^{i\frac{2016\pi}{4}} = e^{i8(252)\pi} = 1$$

لدينا: $L^{2016} = 1$ أي $\left(\frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i}\right)^{2016} = 1$ إذن: $\frac{(-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{2016}}{(3+5i)^{2016}} = 1$

ومنه نستلزم : $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} = (3+5i)^{2016}$ أي : $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3+5i)^{2016} = 0$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

$(z_A - z_O) = a(z_B - z_O)$ إذن: $a = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i} = L = e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A زاويته $\frac{\pi}{4}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA: المثلث OBA مثلث متقايس الساقين

جـ/ بين أن: $AB = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$:

$$AB = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2 + (5-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$$

4) أ بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$:

$$= 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 = 2\overrightarrow{MG}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = 2MG^2 + \frac{(AB)^2}{2} = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$$

ب عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

$MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$ أي : $2MG^2 + 17(2-\sqrt{2}) = 42 - 17\sqrt{2}$ ومنه : $2MG^2 = 8$

أي $MG = 2$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2

التمرين الثالث (4,5 نقط) نعتبر المتتالية U_n المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n \end{cases}$$

متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

1 أ/ احسب U_2 و U_3 :

$U_2 = \frac{1}{4(1+1)} U_1 = \frac{1}{32}$ و $U_3 = \frac{2}{4(2+1)} U_2 = \frac{1}{384}$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

- من اجل $n = 1$: $U_1 > 0$ أي $\frac{1}{4} > 0$ القضية صحيحة
- نفرض أن $U_n > 0$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > 0$
- لدينا : $U_n > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{n}{4(n+1)} > 0$ إذن : $\frac{n}{4(n+1)} U_n$ أي $U_{n+1} > 0$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{4(n+1)} U_n - U_n = \frac{-3n-4}{4(n+1)} U_n < 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة ولكونها محدودة من الأسفل كذلك فهي متتالية متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(l) = l$$

ومنه $f(l) = l$ تكافئ $\frac{n}{4(n+1)} l = l$ أي $\frac{-3n-4}{4(n+1)} l = 0$

و بما ن $\frac{-3n-4}{4(n+1)} \neq 0$ فإن $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2 أ/ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول V_1 حيث: $V_n = n2^n U_n$:

لدينا: $V_n = n2^n U_n$

اي :

$$V_{n+1} = (n+1)2^{n+1} U_{n+1}$$
$$= (n+1)2^n \times 2 \frac{n}{4(n+1)} U_n$$
$$= \frac{1}{2} n 2^n U_n$$

ومنه : $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ وحدها الاول: $V_1 = 1 \times 2 \times U_1 = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n):

$V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و لدينا: $V_n = n2^n U_n$

نستلزم أن : $U_n = \frac{1}{n2^{2n}}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n2^{2n}} = 0$ $\lim_{n\to+\infty} U_n =$ وبالتالي متتالية متقاربة نحو 0

3 1/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots\cdots + V_n$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

2/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots \times (nU_n)$

لدينا : $V_n = n2^nU_n$ أي $U_n = \frac{1}{n2^n}V_n$ وبالتعويض في P_n نجد:

$$P_n = \left(\frac{1}{2}V_1\right) \times \left(2 \times \frac{1}{2\times2^2}V_2\right) \times \left(3 \times \frac{1}{3\times2^3}V_3\right) \times \cdots\cdots \times \left(n \times \frac{1}{n\times2^n}V_n\right)$$

أي: $P_n = \left(\frac{V_1}{2}\right) \times \left(\frac{V_2}{2^2}\right) \times \left(\frac{V_3}{2^3}\right) \times \cdots\cdots \times \left(\frac{V_n}{2^n}\right)$

ومنه : $P_n = \frac{V_1\times V_2\times V_3\times\cdots\cdots\times V_n}{2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\cdots\times2^n}$ ولدينا: $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذن: $P_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\cdots\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\cdots\times2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)n}$

التمرين الرابع (07نقط): **I** نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x + e^x - 1 = -1$ ومنه $y = -1$ معادلة لمستقيم مقارب افقي بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها :

نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها: $g'(x) = e^x(x+2)$

ومنه من اجل كل عدد حقيقي: $g'(x) = 0$

إذا كان : $(x+2) = 0$ أي $x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	-1	↘	$g(-2)$	↗	$+\infty$

3 أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

$g(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

1 احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2 أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = xe^x + e^x - 1 = g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

3 أ/ بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ $= \lim\limits_{x \to -\infty}\big(f(x) - (-x)\big)$ ومنه المستقيم (Δ) ذوالمعادلة $y = -x$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) + x$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C_f)تحت (Δ)	(C_f)يقطع (Δ) في $(0,0)$	(C_f) فوق (Δ)	

4 أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثييها:

$f'(x) = g(x)$ اذن : $f''(x) = g'(x)$

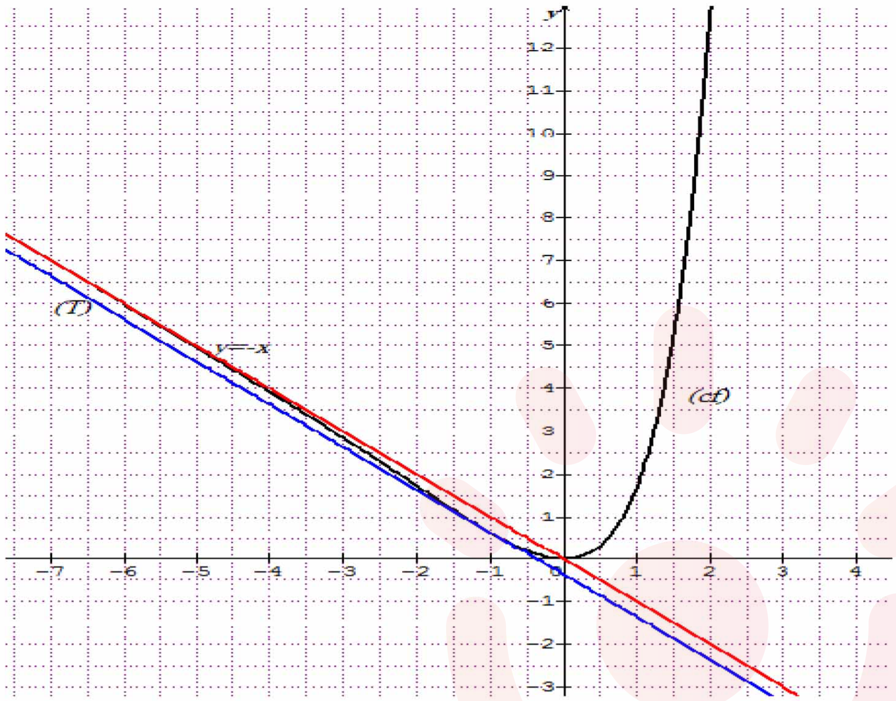
ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند : $x = -2$ وهي: $w(-2\ ,-2e^{-2} + 2)$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له :

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يعني أن : $f'(x) = -1$ أي: $x = -1$

معادلة (T) : $(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ إذن: $y_T = -x + 2 - e^{-1}$

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ (Δ) و المماس (T)و المنحنى (C_f)



د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

$xe^x = m$ فمن اجل كل عدد حقيقي x $xe^x - x = m - x$ أي : $f(x) = -x + m$

m	$-\infty$	e^{-1}		0	$+\infty$
$f(x) = -x + m$	المعادلة لا تقبل حل	المعادلة تقبل حل مضاعف $x = -2$	المعادلة تقبل حلين سالبين	المعادلة تقبل حل معدوم	المعادلة تقبل حل موجب

5 a/ بين أن : $x \longmapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$:

$$((x-1)e^x)' = xe^x$$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = -1$ و $x = 0$

مساحة الحيز هي :

$$\int_{-1}^{0}[-x - f(x)]dx = \int_{-1}^{0}[-xe^x]dx = -\int_{-1}^{0}[xe^x]dx = -[(x-1)e^x]_{-1}^{0} = 1 - 2e^{-1}$$

ومنه مساحة الحيز هي 0.624 وحدة مساحة